レヴィ過程に対する処罰問題と条件付問題

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻
伊庭滉基 (Kohki IBA) *

概要

確率過程とは, 時間の経過とともにランダムに変化する現象を数理的に記述するものである. レヴィ過程はブラウン運動やポアソン過程などの代表的な確率過程を含むより広い確率過程のクラスである. 本講演ではレヴィ過程に「特定の集合に行かない」という条件の下でのふるまいを考える条件付問題と「特定の集合に行きづらくする」という条件の下でのふるまいを考える処罰問題について紹介する.

1　Lévy 過程

確率過程とは, 時間の経過とともにランダムに変化する現象を数理的に記述するものである. これは厳密には関数空間値の確率変数として定義される. 例えば, 有名な確率過程に**Brown 運動**（図 1）や**Poisson 過程**（図 2）がある. それぞれは浮遊微粒子の拡散現象, 地震の発生回数などの数理モデルとして広く用いられている.

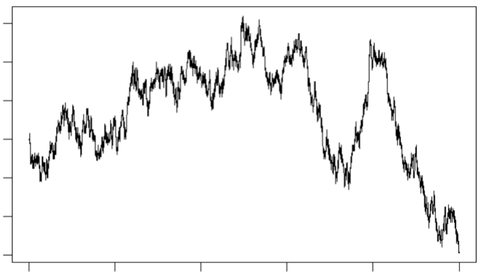

図 1　Brown 運動

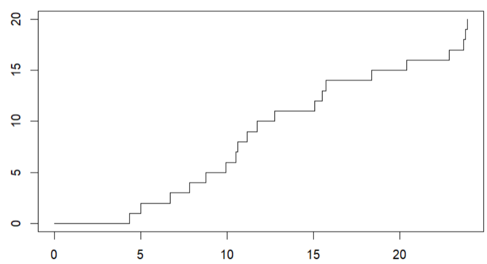

図 2　Poisson 過程

Lévy 過程はこれらの代表的な確率過程を含むより広いクラスであり, 厳密には以下の定義により定まる.

Definition 1.1. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上で定義される確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が Lévy 過程であるとは, 以下の性質を満たすこと:

1. X の見本路は $\mathbb{P}$-a.s. に càdlàg (右連続, 左極限をもつ).
2. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

* E-mail: kohki.iba (at) gmail.com

3. $0 \leq s \leq t$ に対して, $X_t - X_s$ は X_{t-s} と同分布.
4. $0 \leq s \leq t$ に対して, $X_t - X_s$ は $(X_u)_{u \leq s}$ と独立.

先に述べた Brown 運動や Poisson 過程を改めて厳密に定式化すると次のようになる.

Definition 1.2. 確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が Brown 運動であるとは, 以下の性質を満たすこと:

1. B は Lévy 過程である.
2. 各 $t > 0$ に対して, B_t は正規分布 $N(0, t)$ に従う.

Definition 1.3. 確率過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ が Poisson 過程であるとは, 以下の性質を満たすこと:

1. N は Lévy 過程である.
2. 各 $t > 0$ に対して, N_t は Poisson 分布 $\mathrm{Poi}(t)$ に従う.

確率変数 X を特徴づけるものとして, 特性関数 Φ_X とよばれるものがある:

$$\Phi_X(\lambda) := \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X}\right] \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

これは, X の Fourier 変換に相当するものである. Lévy 過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ の場合, ある関数 Ψ が存在して,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_t}\right] = e^{-t\Psi(\lambda)} \qquad (t \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

とできる. この関数 Ψ を Lévy 過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ の特性指数とよぶ. 特性指数は Lévy 過程の研究において重要な役割を果たす.

2 条件付問題

条件付問題とは, 「特定の集合に行かない」という条件の下で元の確率過程のふるまいがどう変化するかを考える問題であり, 厳密には次の極限を考えることによって定式化される:

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathbb{P}_x(\Lambda |\ T_A > \tau) \qquad (\Lambda \in \mathscr{F}_s).$$

ただし, $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ は $x \in \mathbb{R}$ から出発する Markov 過程, $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ は $(X_t)_{t \geq 0}$ から生成される右連続な natural filtration, T_A は集合 A に対する到達時刻, τ は clock とよばれる添数付きランダム時刻, 例えば,

- (定数時計 (C)) $\tau = t$ as $t \to \infty$,
- (指数時計 (Ex)) $\tau = (\boldsymbol{e}_q)$ as $q \to 0+$, ただし, $\boldsymbol{e}_q \sim \mathrm{Exp}(q)$ は $(X_t)_{t \geq 0}$ と独立,
- (一点到達時刻時計 (OH)) $\tau = (T_b)$ as $b \to \pm\infty$, ただし, T_b は点 b に対する到達時刻,
- (二点到達時刻時計 (TH)) $\tau = (T_c \wedge T_{-d})$ as $c, d \to \infty$, $\frac{d-c}{c+d} \to \gamma \in [-1, 1]$,

などがある. 特にこの問題は, **集合 A を回避する条件付問題**もしくは**集合 A^c に滞在する条件付問題**ともよぶ. この問題の先行研究は以下である:

論文	確率過程	条件	Clock
Knight [8]	Brown 運動	avoid $(-\infty, a)$ avoid (a, ∞) stay $[a, -a]$	(C)
Chaumont [2] Choumont-Doney [3]	Lévy 過程	stay $(0, \infty)$	(C) (Ex)
Pantí [9]	Lévy 過程	avoid $\{0\}$	(Ex)
Döring et al. [4]	Lévy 過程	avoid $[a, b]$	(Ex)
Takeda-Yano [13] Takeda [12]	Lévy 過程	avoid $\{0\}$	(Ex) (OH) (TH)
本発表 [5]	Lévy 過程	avoid $\{a_1, ..., a_n\}$	(Ex) (OH) (TH)
		avoid 有界 F_σ-集合 avoid $L\mathbb{Z}$	(Ex)

表 1　Lévy 過程に対する条件付問題の先行研究

3　処罰問題

処罰問題とは,「(局所時間の意味で) 特定の集合に行きづらい」という条件の下で元の確率過程のふるまいがどう変化するかを考える問題であり, 厳密には次の極限を考えることによって定式化される:

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_s \cdot \Gamma_\tau]}{\mathbb{P}_x[\Gamma_\tau]} \qquad (s > 0,\ F_s \in b\mathscr{F}_s).$$

ただし, $\mathbb{P}_x[\cdot]$ は測度 $\mathbb{P}_x$ に関する期待値, $b\mathscr{F}_s$ は $\mathscr{F}_s$-可測な有界汎関数全体, $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ は weight とよばれる非負過程, 例えば,

- (局所時間処罰問題 (LP)) $\Gamma_t = f(L_t^0)$, ただし, $f \in L_+^1$, $(L_t^0)_{t \geq 0}$ は 0 での局所時間,
- (Kac 消滅処罰問題 (KP)) $\Gamma_t = \exp\{-\int_{\mathbb{R}} L_t^x q(dx)\}$, ただし, $q(dx)$ は適当な測度,

などがある. 局所時間 L_t^x とは直感的には時刻 t までに確率過程が x に滞在した時間を表すような確率過程である. (局所時間の厳密な構成は例えば [1] を見よ). そのため, (LP) は「0 に行きづらい」という条件の処罰問題と考えられる. 特に, $f(x) = 1_{\{x=0\}}(x)$ とする場合, これは 0 を回避する条件付問題になるため, 処罰問題は条件付問題の拡張とも考えられる. この問題の先行研究は以下である:

確率過程	論文	Weight	Clock
Brown 運動	Roynette et al. [10]	(LP)	(C)
	Roynette et al. [11]	(KP)	
安定過程	Yano et al. [14]	(LP),(KP)	(C)
Lévy 過程	Takeda-Yano [13]	(LP)	(Ex)
	Iba-Yano [7]	$e^{-(\lambda_1 L_t^{a_1}+\lambda_2 L_t^{a_2})}$	(OH)
	本発表 [6]	$e^{-(\lambda_1 L_t^{a_1}+\cdots+\lambda_n L_t^{a_n})}$	(TH)

表 2　Lévy 過程に対する処罰問題の先行研究

4　主結果

$((X_t),\mathbb{P}_x)$ は $x\in\mathbb{R}$ から出発する再帰的な 1 次元 Lévy 過程とし, その特性指数 $\Psi(\lambda)$ は,

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{q+\Psi(\lambda)}\right| d\lambda<\infty \qquad (q>0)$$

を満たすと仮定する. このとき, 以下の結果を得た:

Theorem 4.1 ([5]). $a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$ とする. このとき, ある関数 $\varphi_{A_n}(x)$ が存在して,

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathbb{P}_x(\Lambda|\ T_{A_n}>\tau)=\mathbb{P}_x\left[1_\Lambda\cdot\frac{\varphi_{A_n}(X_s)}{\varphi_{A_n}(x)}1_{\{T_{A_n}>s\}}\right] \qquad (\Lambda\in\mathscr{F}_s).$$

ただし, 分母が 0 にならない $x\in\mathbb{R}$ を考える. ただし, ***(Ex)*** ならば $\gamma_\tau=0$, ***(OH)*** ならば $\gamma_\tau=\pm1$, ***(TH)*** ならば $\gamma_\tau=\gamma$.

Theorem 4.2 ([5]). A は 0 を含む有界 F_σ-集合とする. このとき, ある関数 $\varphi_A(x)$ が存在して,

$$\lim_{q\to 0+}\mathbb{P}_x(\Lambda|\ T_A>\boldsymbol{e}_q)=\mathbb{P}_x\left[1_\Lambda\cdot\frac{\varphi_A(X_s)}{\varphi_A(x)}1_{\{T_A>s\}}\right] \qquad (\Lambda\in\mathscr{F}_s).$$

ただし, 分母が 0 にならない $x\in\mathbb{R}$ を考える.

Theorem 4.3 ([6]). $a_1,...,a_n\in\mathbb{R},\ \lambda_1,...,\lambda_n>0$ とする. このとき, ある関数 $\varphi^{(\gamma,n)}(x)$ が存在して,

$$M_s^{(\gamma,n)}:=\varphi^{(\gamma,n)}(X_s)\Gamma_s^{(n)}:=\varphi^{(\gamma,n)}(X_s)\exp\left(-\sum_{k=1}^n\lambda_k L_t^{a_k}\right)$$

は *martingale* になり,

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathbb{P}_x[F_s\cdot\Gamma_\tau^{(n)}]}{\mathbb{P}_x[\Gamma_\tau^{(n)}]}=\mathbb{P}_x\left[F_s\cdot\frac{M_s^{(\gamma_\tau,n)}}{M_0^{(\gamma_\tau,n)}}\right] \qquad (F_s\in b\mathscr{F}_s).$$

ただし, ***(Ex)*** ならば $\gamma_\tau=0$, ***(OH)*** ならば $\gamma_\tau=\pm1$, ***(TH)*** ならば $\gamma_\tau=\gamma$.

参考文献

[1] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] L. Chaumont. Conditionings and path decompositions for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 64(1):39–54, 1996.

[3] L. Chaumont and R. A. Doney. On Lévy processes conditioned to stay positive. *Electron. J. Probab.*, 10:no. 28, 948–961, 2005.

[4] L. Döring, A. R. Watson, and P. Weissmann. Lévy processes with finite variance conditioned to avoid an interval. *Electron. J. Probab.*, 24:Paper No. 55, 32, 2019.

[5] K. Iba. Conditioning to avoid bounded sets for a one-dimensional Lévy processes, preprint, arXiv: 2501.02776.

[6] K. Iba. Multi-point local time penalizations with various clocks for one-dimensional Lévy processes, preprint, arXiv: 2507.00457.

[7] K. Iba and K. Yano. Two-point local time penalizations with various clocks for Lévy processes. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 22(1):183–207, 2025.

[8] F. B. Knight. Brownian local times and taboo processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:173–185, 1969.

[9] H. Pantí. On Lévy processes conditioned to avoid zero. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 14(2):657–690, 2017.

[10] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.

[11] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(2):171–246, 2006.

[12] S. Takeda. Sample path behaviors of lévy processes conditioned to avoid zero, preprint, arXiv:2211.12863.

[13] S. Takeda and K. Yano. Local time penalizations with various clocks for Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 28:Paper No. 12, 35, 2023.

[14] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.